

Définitions.....	1
Mettre sous les yeux	1
La démonstration est un syllogisme scientifique	2
Tirer des conséquences valides de prémisses qui, sans être « exactement vraies », ne sont pas manifestement contraires à l'expérience.	2
Les démonstrations sont les yeux de l'esprit	2
Présenter (<i>darstellen, ostendere, exhibere</i>), rendre intuitif.....	2
Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration	3
Démontrer, c'est construire	3
Produire un phénomène de façon médiate et méthodique.....	4
Distinctions : de quoi se distingue la démonstration.....	4
Syllogisme scientifique (démonstration), dialectique et éristique	4
Preuve et démonstration.....	5
Démonstration et vérification	5
Démonstration et syllogisme	5
Distinctions : différentes formes de démonstrations	5
La démonstration rhétorique (enthymème).....	5
Démonstration analytique et démonstration synthétique	6
Mathématique formelle et métamathématique.....	7
Démonstration apodictique et démonstration hypothético-déductive.....	7
Fonction psychologique et fonction logique	7
Démonstration par récurrence	8
Démontrer le réel.....	8
Démonstration et induction.....	8
« L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence »	8
Mathématiques	9
Les démonstrations géométriques, modèles de toute connaissance	9
Il n'y a que la mathématique qui contienne des démonstrations	9
La démonstration mathématique n'est pas analytique	10
« L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence »	10
Métaphysique.....	10
Le principe de contradiction, fondement indémontrable de la démonstration	10
Démonstration métaphysique et démonstration géométrique.....	11
La métaphysique a besoin de démonstration.....	11
Physique.....	11
Physique et géométrie	11

Définitions

Mettre sous les yeux

« La description [*demonstratio*] consiste à narrer un fait de telle manière que l'action semble se dérouler et l'événement se passer sous nos yeux. », Quintilien, *Rhétorique à Herennius*, éd. de Guy Achard, Les Belles Lettres, Paris, 1989, p. 224.

La démonstration est un syllogisme scientifique

« Nous estimons posséder la science d'une chose d'une manière absolue, et non pas, à la façon des Sophistes, d'une manière purement accidentelle, quand nous croyons que nous connaissons la cause par laquelle la chose est, que nous savons que cette cause est celle de la chose, et qu'en outre il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est. Il est évident que telle est la nature de la connaissance scientifique ; ce qui le montre, c'est l'attitude aussi bien de ceux qui ne savent pas que de ceux qui savent : les premiers croient se comporter comme nous venons de l'indiquer, et ceux qui savent se comportent aussi en réalité de cette même façon. Il en résulte que l'objet de la science au sens propre est quelque chose qui ne peut pas être autre qu'il n'est. La question de savoir s'il existe encore un autre mode de connaissance sera examinée plus tard. Mais ce que nous appelons ici *savoir*, c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par *démonstration*, j'entends le syllogisme scientifique, et j'appelle *scientifique* un syllogisme dont la possession même constitue pour nous la science. Si donc la connaissance scientifique consiste bien en ce que nous avons posé, il est nécessaire aussi que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle, et dont elles sont les causes. » Aristote, *Les seconds analytiques*, livre I, 2, Paris, Vrin, 1970, traduction J. Tricot, p. 7-8.

Tirer des conséquences valides de prémisses qui, sans être « exactement vraies », ne sont pas manifestement contraires à l'expérience.

« Vous demandez si je tiens que ce que j'ai écrit de la réfraction soit démonstration ; et je crois que oui, au moins autant qu'il est possible d'en donner en cette matière, sans avoir auparavant démontré les principes de la Physique par la Métaphysique (ce que j'espère faire quelque jour, mais qui ne l'a point été par ci-devant), et autant qu'aucune autre question de Mécanique, ou d'Optique ou d'Astronomie, ou autre matière qui ne soit point purement géométrique, ou arithmétique, ait jamais été démontrée. Mais d'exiger de moi des démonstrations géométriques en une matière qui dépend de la Physique, c'est vouloir que je fasse des choses impossibles. Et si on ne veut nommer démonstrations que les preuves des géomètres, il faut donc dire qu'Archimède n'a jamais rien démontré dans les Mécaniques, ni Vitellion en l'Optique, ni Ptolémée en l'Astronomie, etc., ce qui toutefois ne se dit pas. Car on se contente, en telles matières, que les auteurs, ayant présupposé certaines choses qui ne sont point manifestement contraires à l'expérience, aient au reste parlé conséquemment et sans faire de paralogismes, encore même que leurs suppositions ne soient pas exactement vraies. » Descartes, *Lettre au père Mersenne du 17 mai 1638*, dans *Œuvres*, Garnier, II, p. 62-63.

Les démonstrations sont les yeux de l'esprit

« Les yeux de l'esprit, par le moyen desquels il voit les choses et les observe, ce sont les démonstrations elles-mêmes », Spinoza, *Ethique*, V, 23, scolie

Présenter (*darstellen, ostendere, exhibere*), rendre intuitif

« Des *concepts de l'entendement* doivent toujours comme tels être démontrables (si par le terme de démontrer on entend comme dans l'anatomie simplement la *présentation*), c'est-à-dire que l'objet qui leur correspond doit toujours pouvoir leur être donné dans l'intuition (pure ou empirique), car c'est là seulement qu'ils peuvent devenir des connaissances. (...) Cela doit pouvoir se faire, car dans le cas contraire on n'est pas certain que la pensée ne soit pas vide, c'est-à-dire sans aucun objet.

On n'utilise généralement en logique des expressions « démontrable » ou « indémontrable » qu'en ce qui concerne les propositions : cependant il vaudrait mieux se servir des expressions de *propositions certaine médiatement seulement, proposition immédiatement certaine* ; en effet la philosophie pure possède aussi des propositions des deux espèces, si l'on entend par là des propositions vraies qui peuvent être prouvées

et des propositions vraies qui ne peuvent pas être prouvées. En tant que philosophie, elle peut bien prouver (*beweisen*), mais elle ne peut démontrer (*demonstrieren*), si l'on ne veut pas s'écarter complètement de la signification de ce terme, d'après laquelle démontrer (*ostendere, exhibere*) signifie : présenter en même temps son concept dans l'intuition (que ce soit en prouvant ou simplement en définissant) ; si l'intuition est *a priori* on parle de la construction du concept, mais si elle est empirique, il s'agit de l'exhibition de l'objet, par laquelle la réalité objective du concept est assurée. On dit ainsi que l'anatomiste démontre l'œil humain, lorsqu'il rend intuitif par la décomposition de cet organe le concept qu'il a préalablement exposé discursivement. » Kant, *Critique de la faculté de juger*, § 57, Rem. I.

Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration

« Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration. L'expérience nous apprend bien ce qui est, mais non pas que ce qui est ne puisse pas du tout être autrement. Aussi les fondements de preuve empiriques ne peuvent-ils fournir aucune preuve apodictique. Mais la certitude intuitive, c'est-à-dire l'évidence, ne peut jamais naître de concepts *a priori* (dans la connaissance discursive), quelque apodictiquement certain que puisse être d'ailleurs le jugement. Il n'y a donc que la mathématique qui contienne des démonstrations, parce qu'elle ne dérive pas sa connaissance de concepts, mais de la construction des concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée *a priori* comme correspondant aux concepts. La méthode algébrique elle-même, avec ses équations d'où elle tire par réduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas, il est vrai, une construction géométrique, n'en est pas moins une construction caractéristique, où, à l'aide des signes, on présente les concepts dans l'intuition, surtout ceux du rapport des grandeurs, et où, sans jamais regarder à l'aspect heuristique, on garantit tous les raisonnements contre les erreurs par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux. La connaissance philosophique, au contraire, doit se passer de cet avantage, puisqu'elle doit toujours considérer l'universel *in abstracto* (au moyen des concepts), tandis que la mathématique peut examiner l'universel *in concreto* (dans l'intuition particulière), et pourtant au moyen d'une représentation pure *a priori*, ce par quoi toute fausse démarche devient visible. Je donnerais donc plus volontiers aux preuves philosophiques le titre de *preuves acroamatiques* (discursives) que celui de *démonstrations*, parce que ces preuves ne peuvent se faire que par de simples mots (par l'objet en pensée), tandis que, comme l'expression l'indique déjà, les démonstrations pénètrent dans l'intuition de l'objet. » Kant, *Critique de la raison pure*, « Théorie transcendantale de la méthode », chapitre premier, première section, dans *Œuvres philosophiques*, I, Pléiade, p. 1313.

Démontrer, c'est construire

« Démontrer, c'est construire. » Goblot, *Traité de logique*, § 169, p. 272

« En logique, nous n'avons jamais affaire qu'à des opérations discursives ; le raisonnement ne se présente jamais que comme une opération de la pensée agissante. Les axiomes mêmes ne sont autre chose que l'impossibilité de se refuser à une seconde assertion après qu'on a consenti à une première. Nous ne connaissons pas de pensée qui ne soit discursive. Une intelligence qui, n'étant pas soumise comme la nôtre à la loi du temps, apercevrait immédiatement les conséquences dans les principes et serait purement intuitive, une telle intelligence n'est pas seulement un idéal inaccessible pour nous ; ce n'est pas seulement une chose tout à fait inconnue de nous ; c'est une chose tout à fait impossible, parce que contraire à la nature essentielle du raisonnement. On ne peut apercevoir les conséquences dans les principes, parce qu'elles n'y sont pas contenues. Raisonner, c'est construire. » Goblot, *Traité de logique*, p. 20.

« Le raisonnement géométrique n'est jamais purement contemplatif ; il est actif et constructif ; et c'est l'activité constructive de l'esprit qui fait apparaître un résultat nouveau. Une pensée purement

contemplative ne saurait découvrir dans son objet autre chose que cet objet même, passer d'une propriété à une autre propriété ; elle pourrait découvrir dans un principe général les propositions plus spéciales, plus restreintes, implicitement affirmées en lui ; elle ne saurait y découvrir les conséquences qui n'y sont pas, mais qui en résultent, qu'il ne contient pas, mais qu'il entraîne, apercevoir une relation nécessaire entre des propriétés hétérogènes ; elle serait donc incapable de faire aucune démonstration. » Goblot, *Traité de logique*, p. 264.

Produire un phénomène de façon médiate et méthodique

La « Réalité relativiste » est une « réalité éminemment théorique, bien éloignée de l'objet qu'on trouve, qu'on décrit, qu'on saisit, par des attributs évidents et immédiats. (...) On voit la Réalité relativiste apparaître à l'extrême pointe d'une construction ; elle est clairement solidaire d'une méthode de construction. C'est donc une fonction épistémologique tardive qu'on ne peut comprendre si on la retranche du mouvement qui la produit. En particulier, il ne servirait à rien de la postuler tant qu'on n'a pas fixé les critères qui la justifient. Or une telle organisation de critères est une tâche entièrement discursive. Le réel se démontre, il ne se montre pas. » Bachelard, *La valeur inductive de la relativité*, p. 125.

« Dans un livre précédent, nous n'hésitions pas à écrire : on démontre le réel, on ne le montre pas. C'est surtout vrai quand il s'agit de mettre en œuvre un phénomène organique. En effet, dès que l'objet se présente comme un complexe de relations il faut l'appréhender par des méthodes multiples. L'objectivité ne peut se détacher des caractères sociaux de la preuve. On ne peut arriver à l'objectivité qu'en exposant d'une manière discursive et détaillée une méthode d'objectivation.

Mais cette thèse de la démonstration préalable que nous croyons à la base de toute connaissance objective, combien elle est évidente dans le domaine scientifique ! Déjà l'observation a besoin d'un *corps* de précautions qui conduisent à réfléchir avant de regarder, qui réforment du moins la première vision, de sorte que ce n'est jamais la première observation qui est la bonne. L'observation scientifique est toujours une observation polémique ; elle confirme ou infirme une thèse antérieure, un schéma préalable, un plan d'observation ; elle montre en démontrant ; elle hiérarchise les apparences ; elle transcende l'immédiat ; elle reconstruit le réel après avoir reconstruit ses schémas. Naturellement, dès qu'on passe de l'observation à l'expérimentation, le caractère polémique de la connaissance devient plus net encore. Alors il faut que le phénomène soit trié, filtré, épuré, coulé dans le moule des instruments, produit sur le plan des instruments. Or les instruments ne sont que des théories matérialisées. Il en sort des phénomènes qui portent de toutes parts la marque théorique. » Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, introduction, Paris, PUF, 1934, rééd. coll. « Quadrige », 16^e édition, 1984, p. 15-16.

Distinctions : de quoi se distingue la démonstration

Syllogisme scientifique (démonstration), dialectique et éristique

« Le *syllogisme* est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, une autre chose différente d'elles en résulte nécessairement, par les choses mêmes qui sont posées. – C'est une *démonstration* quand le syllogisme part de prémisses vraies et premières, ou encore de prémisses telles que la connaissance que nous en avons prend elle-même son origine dans des prémisses premières et vraies. – Est *dialectique* le syllogisme qui conclut de prémisses probables. – Sont *vraies* et *premières* les choses qui tirent leur certitude, non pas d'autres choses, mais d'elles-mêmes : car on ne doit pas, pour les principes de la science, avoir à en rechercher le pourquoi, mais chacun de ces principes doit être par soi-même certain. – Sont *probables* les opinions qui sont reçues par tous les hommes, ou par la plupart d'entre eux, ou par les sages, et, parmi ces derniers, soit par tous, soit par la plupart, soit enfin par les

plus notables et les plus illustres. – Est *éristique* le syllogisme qui part d'opinions qui, tout en paraissant probables, en réalité ne le sont pas ; et encore, le syllogisme qui ne conclut qu'en apparence d'opinions probables ou paraissant probables : en effet, tout ce qui paraît probable n'est pas probable, car rien de ce qui est dit probable ne présente au premier coup d'œil un caractère certain de fausseté, comme c'est le cas pour les principes des arguments éristiques, où c'est immédiatement que se révèle la nature de la fausseté, et cela, la plupart du temps, même pour des esprits doués d'une médiocre compréhension. Ainsi donc, des syllogismes éristiques dont nous venons de parler, appelons le premier *sylogisme* aussi, mais appelons l'autre *sylogisme éristique* et non pas seulement *sylogisme*, puisque c'est seulement en apparence qu'il conclut, alors qu'en réalité il ne conclut pas.» Aristote : *Topiques*, I, 1, p.1-3.

Preuve et démonstration

« La preuve est une raison qui donne un certain degré de certitude ; et la démonstration porte avec elle l'évidence », Condillac.

« On n'use généralement en logique des expressions « démontrable » ou « indémontrable » qu'en ce qui concerne les propositions : cependant il vaudrait mieux se servir des expressions de *propositions certaine médiatement seulement*, *proposition immédiatement certaine* ; en effet la philosophie pure possède aussi des propositions des deux espèces, si l'on entend par là des propositions vraies qui peuvent être prouvées et des propositions vraies qui ne peuvent pas être prouvées. En tant que philosophie, elle peut bien prouver (*beweisen*), mais elle ne peut démontrer (*demonstrieren*), si l'on ne veut pas s'écarter complètement de la signification de ce terme, d'après laquelle démontrer (*ostendere, exhibere*) signifie : présenter en même temps son concept dans l'intuition (que ce soit en prouvant ou simplement en définissant) ; si l'intuition est *a priori* on parle de la construction du concept, mais si elle est empirique, il s'agit de l'exhibition de l'objet, par laquelle la réalité objective du concept est assurée. On dit ainsi que l'anatomiste démontre l'œil humain, lorsqu'il rend intuitif par la décomposition de cet organe le concept qu'il a préalablement exposé discursivement. » Kant, *Critique de la faculté de juger*, § 57, Rem. I.

Démonstration et vérification

« La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses. » Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, ch. I, Flammarion, 1917, p. 11.

Démonstration et syllogisme

« Il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme. » Poincaré, *La science et l'hypothèse*, ch. I, Flammarion, 1917, p. 13.

« La condition de validité de tout syllogisme est que la conséquence doit être contenue dans les prémisses ; or, dans la démonstration mathématique, la conséquence résulte des principes, mais n'y est pas contenue » Goblots, *Traité de logique*, Armand Colin, 1918, p. 265, note 9.

Distinctions : différentes formes de démonstrations

La démonstration rhétorique (enthymème)

« Puisqu'évidemment la méthode propre à la technique [*entechnos methodos*] ne repose que sur les preuves [*pistois*], que la preuve est un certain genre de démonstration [*pistois apodeixis*] (car nous

accordons surtout créance à ce que nous supposons démontré [*apodedeikthai*]), que la démonstration rhétorique [*apodeixis réthorikè*] est l'enthymème, que celui-ci est, à parler en général, la plus décisive des preuves [*pisteon*], que c'est un syllogisme d'une certaine espèce, et que toutes les espèces de syllogisme ressortissent à la dialectique, ou à la dialectique entière ou à quelqu'une de ses parties, il est clair que le plus apte à étudier spéculativement les prémisses et la marche d'un syllogisme est aussi le plus propre à l'enthymème, à condition de comprendre en outre à quelles sortes de sujets s'applique l'enthymème et quelles différences il présente par rapport aux syllogismes logiques. Le vrai et ce qui lui ressemble relèvent en effet de la même faculté ; la nature a, d'ailleurs, suffisamment doué les hommes pour le vrai et ils atteignent la plupart du temps à la vérité. Aussi la rencontre des probabilités [*endoxa*] et celle de la vérité supposent-elles semblable *habitus*. » Aristote, *Rhétorique*, livre I, 1, 1355 a.

Démonstration analytique et démonstration synthétique

« Dans la façon d'écrire des géomètres, je distingue deux choses, à savoir l'ordre, et la manière de démontrer.

L'ordre consiste en cela seulement, que les choses qui sont proposées les premières doivent être connues sans l'aide des suivantes, et que les suivantes doivent après être disposées de telle façon, qu'elles soient démontrées par les seules choses qui les précèdent. (...)

La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou résolution, et l'autre par la synthèse ou composition.

L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, et fait voir comment les effets dépendent des causes ; en sorte que, si le lecteur la veut suivre, et jeter les yeux soigneusement sur tout ce quelle contient, il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui-même l'avait inventée.

Mais cette sorte de démonstration n'est pas propre à convaincre les lecteurs opiniâtres ou peu attentifs : car si on laisse échapper, sans y prendre garde, la moindre des choses qu'elle propose, la nécessité de ses conclusions ne paraîtra point ; et on n'a pas coutume d'y exprimer fort amplement les choses qui sont assez claires de soi-même, bien que ce soit ordinairement celles auxquelles il faut le plus prendre garde.

La synthèse, au contraire, par une voie tout autre, et comme en examinant les causes par leurs effets (bien que la preuve qu'elle contient soit souvent aussi des effets par les causes), démontre à la vérité clairement ce qui est contenu en ses conclusions, et se sert d'une longue suite de définitions, de demandes, d'axiomes, de théorèmes et de problèmes, afin que, si on lui nie quelques conséquences, elle fasse voir comment elles sont contenues dans les antécédents, et qu'elle arrache le consentement du lecteur, tant obstiné et opiniâtre qu'il puisse être ; mais elle ne donne pas, comme l'autre, une entière satisfaction aux esprits de ceux qui désirent d'apprendre, parce qu'elle n'enseigne pas la méthode par laquelle la chose a été inventée.

Les anciens géomètres avaient coutume de se servir seulement de cette synthèse dans leurs écrits, non qu'ils ignorassent entièrement l'analyse, mais, à mon avis, parce qu'ils en faisaient tant d'état, qu'ils la réservaient pour eux seuls, comme un secret d'importance.

Pour moi, j'ai suivi seulement la voie analytique dans mes Méditations, parce qu'elle me semble être la plus vraie, et la plus propre pour enseigner ; mais quant à la synthèse, laquelle sans doute est celle que vous désirez ici de moi, encore que, touchant les choses qui se traitent en la géométrie, elle puisse utilement être mise après l'analyse, elle ne convient pas toutefois si bien aux matières qui appartiennent à la métaphysique. » Descartes : Réponses aux secondes objections (du R. P. Mersenne), dans *Œuvres philosophiques*, II, Garnier, 1967, éd. Alquié, p. 581-584.

Mathématique formelle et métamathématique

« La séparation nette entre mathématique formelle et métamathématique intuitive est la nouvelle étape essentielle de la théorie de la démonstration. Elle a pour conséquence que le mot « démontrer », par exemple, reçoit une signification toute différente dans la mathématique formelle et dans la métamathématique. Dans le premier cas il peut être défini par : « déduire conformément aux règles du calcul », dans le deuxième cas il signifie : « montrer au moyen de raisonnements intuitifs ». » Heyting: *Les fondements des mathématiques, intuitionnisme, théorie de la démonstration*, Paris, Gauthier-Villars, 1955, p. 45 (« Théorie de la démonstration de Hilbert »).

Démonstration apodictique et démonstration hypothético-déductive

« Dans l'interprétation traditionnelle, la démonstration mathématique était catégorique et apodictique. Elle disait : ces principes étant vrais absolument, telle proposition que j'en déduis, est donc vraie aussi. Aristote l'appelait : le syllogisme du nécessaire. Maintenant, elle dit seulement ceci: si l'on pose, arbitrairement, tel ensemble de principes, voici les conséquences qui, formellement, en résultent. La nécessité ne réside plus que dans le lien logique qui unit les propositions, elle s'est retirée des propositions elles-mêmes. La mathématique est devenue, selon le mot de Pieri, un *système hypothético-déductif*. » Blanché, *L'axiomatique*, PUF, p. 6-7.

Fonction psychologique et fonction logique

R. Blanché, *L'axiomatique*, P.U.F., 1967, p. 19 : « La démonstration hésite entre une fonction psychologique (déterminer l'assentiment) et une fonction logique (organiser les propositions en système) ». À la différence de la fonction « logique » de la démonstration, qui fait abstraction de la « vérité matérielle » des propositions », sa fonction « psychologique » la met au service de l'établissement de la « vérité du contenu » : « si l'on met au premier plan la vérité du contenu, alors démonstration et définition deviennent de simples moyens de l'établir. Le rôle de la définition sera de faire concevoir exactement le sens des termes qui composent les propositions, celui de la démonstration de faire admettre la vérité de celles-ci. Définitions et démonstrations relèvent alors, à proprement parler, de la rhétorique ; leur fonction est essentiellement psychologique : pédagogique ou didactique. Dans l'autre hypothèse, au contraire, elles n'ont plus qu'une fonction logique : relier tous les termes et toutes les propositions en un ensemble systématique. Or il est clair, d'abord que les deux exigences, efficacité psychologique et rigueur logique, tirent parfois en des sens opposés, ensuite que, dès qu'on s'attache à la première, on rend la valeur d'une définition ou d'une démonstration relative, et même doublement relative : une définition ou une démonstration n'est plus bonne ou mauvaise, elle est seulement meilleure ou moins bonne qu'une autre ; et cette qualité, à son tour, varie selon le lecteur ou l'auditeur (...). Qu'on puisse, comme fait Pascal, regarder le raisonnement géométrique comme un modèle de l'art de convaincre, lui-même partie de l'art de persuader, n'implique pas que telle soit sa fonction première et essentielle. En fait, nous savons que beaucoup des propositions d'Euclide étaient connues avant lui, et il n'y a guère de doute qu'elles fussent admises comme vraies par tous les experts. Mais il restait à les organiser logiquement, à les relier les unes aux autres par un réseau serré. C'est apparemment ce qu'a voulu faire, en tout cas ce qu'a réellement fait Euclide. Et tel est bien maintenant le propos de plus en plus avoué du mathématicien. (...) « Dans le système de tous les jugements vrais, écrivait déjà Bolzano, règne une connexion objective indépendante du fait contingent que nous la connaissons subjectivement ; c'est par elle que certains jugements sont le fondement des autres. » [*Philosophie des Mathematik*, 1810 ; cité par J. Cavailles, *Méthode axiomatique et formalisme*, p. 46-47]. Dégager ces connexions objectives, tel apparaît désormais le vrai but de la démonstration dans une théorie déductive. En même temps que la certitude subjective, la vérité matérielle des propositions est laissée de côté, et la mathématique devient hypothético-déductive. » (*Ibid.*, p. 16).

Démonstration par récurrence

C'est « le raisonnement mathématique par excellence » (Poincaré, *La science et l'hypothèse*, ch. 1, Flammarion, 1917, p. 21). Son procédé est le suivant : « On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers. » (*Ibid.*, p. 19). La règle sur laquelle il se fonde est irréductible au principe de contradiction, ne vient pas non plus de l'expérience, et n'est pas conventionnelle (*Ibid.*, p. 23). « Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience. » (*Ibid.*, p. 24)

Démontrer le réel

La « Réalité relativiste » est une « réalité éminemment théorique, bien éloignée de l'objet qu'on trouve, qu'on décrit, qu'on saisit, par des attributs évidents et immédiats. (...) On voit la Réalité relativiste apparaître à l'extrême pointe d'une construction ; elle est clairement solidaire d'une méthode de construction. C'est donc une fonction épistémologique tardive qu'on ne peut comprendre si on la retranche du mouvement qui la produit. En particulier, il ne servirait à rien de la postuler tant qu'on n'a pas fixé les critères qui la justifient. Or une telle organisation de critères est une tâche entièrement discursive. Le réel se démontre, il ne se montre pas. » Bachelard, *La valeur inductive de la relativité*, p. 125.

« Dans un livre précédent, nous n'hésitions pas à écrire : on démontre le réel, on ne le montre pas. C'est surtout vrai quand il s'agit de mettre en œuvre un phénomène organique. En effet, dès que l'objet se présente comme un complexe de relations il faut l'appréhender par des méthodes multiples. L'objectivité ne peut se détacher des caractères sociaux de la preuve. On ne peut arriver à l'objectivité qu'en exposant d'une manière discursive et détaillée une méthode d'objectivation.

Mais cette thèse de la démonstration préalable que nous croyons à la base de toute connaissance objective, combien elle est évidente dans le domaine scientifique ! Déjà l'observation a besoin d'un *corps* de précautions qui conduisent à réfléchir avant de regarder, qui réforment du moins la première vision, de sorte que ce n'est jamais la première observation qui est la bonne. L'observation scientifique est toujours une observation polémique ; elle confirme ou infirme une thèse antérieure, un schéma préalable, un plan d'observation ; elle montre en démontrant ; elle hiérarchise les apparences ; elle transcende l'immédiat ; elle reconstruit le réel après avoir reconstruit ses schémas. Naturellement, dès qu'on passe de l'observation à l'expérimentation, le caractère polémique de la connaissance devient plus net encore. Alors il faut que le phénomène soit trié, filtré, épuré, coulé dans le moule des instruments, produit sur le plan des instruments. Or les instruments ne sont que des théories matérialisées. Il en sort des phénomènes qui portent de toutes parts la marque théorique. » Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, introduction, Paris, PUF, 1934, rééd. coll. « Quadrige », 16^e édition, 1984, p. 15-16.

Démonstration et induction

« L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence »

« Pourquoi donc ce jugement [= le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence] s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est

une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, *la loi est manifeste*, disons-nous, et elle l'est au même titre que toute loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. » Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, ch. I, Flammarion, 1917, p. 23-24.

Mathématiques

Les démonstrations géométriques, modèles de toute connaissance

« Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. » Descartes, *Discours de la méthode*, II, dans *Œuvres philosophiques*, I, Garnier, 1963, éd. Alquié, p. 586-587.

Il n'y a que la mathématique qui contienne des démonstrations

« Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration. L'expérience nous apprend bien ce qui est, mais non pas que ce qui est ne puisse pas du tout être autrement. Aussi les fondements de preuve empiriques ne peuvent-ils fournir aucune preuve apodictique. Mais la certitude intuitive, c'est-à-dire l'évidence, ne peut jamais naître de concepts *a priori* (dans la connaissance discursive), quelque apodictiquement certain que puisse être d'ailleurs le jugement. Il n'y a donc que la mathématique qui contienne des démonstrations, parce qu'elle ne dérive pas sa connaissance de concepts, mais de la construction des concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée *a priori* comme correspondant aux concepts. La méthode algébrique elle-même, avec ses équations d'où elle tire par réduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas, il est vrai, une construction géométrique, n'en est pas moins une construction caractéristique, où, à l'aide des signes, on présente les concepts dans l'intuition, surtout ceux du rapport des grandeurs, et où, sans jamais regarder à l'aspect heuristique, on garantit tous les raisonnements contre les erreurs par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux. La connaissance philosophique, au contraire, doit se passer de cet avantage, puisqu'elle doit toujours considérer l'universel *in abstracto* (au moyen des concepts), tandis que la mathématique peut examiner l'universel *in concreto* (dans l'intuition particulière), et pourtant au moyen d'une représentation pure *a priori*, ce par quoi toute fausse démarche devient visible. Je donnerais donc plus volontiers aux preuves philosophiques le titre de *preuves acroamatiques* (discursives) que celui de *démonstrations*, parce que ces preuves ne peuvent se faire que par de simples mots (par l'objet en pensée), tandis que, comme l'expression l'indique déjà, les démonstrations pénètrent dans l'intuition de l'objet. » Kant,

Critique de la raison pure, « Théorie transcendantale de la méthode », chapitre premier, première section, dans *Œuvres philosophiques*, I, Pléiade, p. 1313.

La démonstration mathématique n'est pas analytique

« La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses. (...) Il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme. » Poincaré, *La science et l'hypothèse*, ch. I, Flammarion, 1917, p. 11-13.

« L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence »

« Pourquoi donc ce jugement [= le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence] s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, *la loi est manifeste*, disons-nous, et elle l'est au même titre que toute loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. » Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1968, p. 42.

Métaphysique

Le principe de contradiction, fondement indémontrable de la démonstration

« Il y a des philosophes qui, comme nous l'avons dit, prétendent, d'une part, <1006 a> que la même chose peut, à la fois, être et n'être pas, et, d'autre part, que l'on peut le concevoir. Ce langage est aussi celui d'un grand nombre de physiciens. Quant à nous, nous venons de reconnaître qu'il est impossible, pour une chose, d'être et de n'être pas en même temps, et c'est en nous appuyant sur cette impossibilité que nous avons montré que ce principe est le plus ferme de tous. Quelques philosophes réclament certes une démonstration (*apodeiknunai*) (même pour ce principe, mais c'est par une grossière ignorance (*apaidensia*) : c'est de l'ignorance, en effet, que de ne pas distinguer ce qui a besoin de démonstration (*apodeixis*) et ce qui n'en a pas besoin. Or, il est absolument impossible de tout démontrer : On irait à l'infini, de telle sorte que, même ainsi, il n'y aurait pas de démonstration. Et s'il y a des vérités dont il ne faut pas chercher de démonstration, qu'on nous dise pour quel principe il le faut moins que pour celui-là ?

Il est cependant possible d'établir par réfutation (*apodeixai elenktikôs*) l'impossibilité que la même chose soit et ne soit pas, pourvu que l'adversaire dise seulement quelque chose. S'il ne dit rien, il est ridicule de chercher à discuter avec quelqu'un qui ne peut parler de rien en tant qu'il ne le peut : un tel homme en tant que tel, est dès lors semblable à un végétal. Mais établir par voie de réfutation (*elenktikôs apodeixai*), je dis que c'est là tout autre chose que démontrer (*apodeixai*) : une démonstration <proprement dite> aurait toute l'apparence d'une pétition de principe, tandis que si c'est un autre qui était responsable d'une telle pétition de principe,

nous serions en présence d'une réfutation, et non d'une démonstration. Le point de départ pour tous les arguments de cette nature, c'est de requérir de l'adversaire, non pas qu'il dise que quelque chose est ou n'est pas (car on pourrait peut être croire que c'est supposer ce qui est en question), mais qu'il dise du moins quelque chose qui ait une signification (*sêmeinein ti*) pour lui-même et pour autrui. Cela est de toute nécessité, s'il veut dire réellement quelque chose (*legein ti*) ; sinon, en effet, un tel homme ne serait capable de parler, ni avec lui-même ni avec un autre. Si, par contre, il concède ce point, une démonstration (*apodeixis*) pourra avoir lieu, car on aura déjà quelque chose de déterminé. Mais l'auteur responsable de la pétition de principe n'est plus celui qui démontre mais celui qui subit la démonstration, car en ruinant le raisonnement, il se prête au raisonnement. De plus, accorder cela, c'est accorder qu'il y a quelque chose de vrai indépendamment de toute démonstration. D'où il suit que rien ne pourrait être *ainsi et non ainsi*. » Aristote, *Métaphysique*, IV, 1005b35-1006a28.

Démonstration métaphysique et démonstration géométrique

« Je pense avoir trouvé comment on peut démontrer les vérités métaphysiques d'une façon qui est plus évidente que les démonstrations de la géométrie », Descartes, *Lettre à Mersenne* du 15 avril 1630.

La métaphysique a besoin de démonstration

« Je reconnais aussi que d'autres hommes, distingués par leur pénétration, ont abordé les problèmes métaphysiques et approfondi plusieurs d'entre eux, mais ils les ont entourés de tant d'obscurité, qu'ils paraissent nous offrir plutôt des visions que des démonstrations (*ut divinare magis appareat quam demonstrare*). Or, il me semble que la métaphysique a encore plus besoin de certitude et de lumière que les mathématiques mêmes. » Leibniz, *De la réforme de la philosophie première et de la notion de substance*, dans *Opuscules philosophiques choisis*, Vrin, 1978, p. 80.

Physique

Physique et géométrie

« Vous demandez si je tiens que ce que j'ai écrit de la réfraction soit démonstration ; et je crois que oui, au moins autant qu'il est possible d'en donner en cette matière, sans avoir auparavant démontré les principes de la Physique par la Métaphysique (ce que j'espère faire quelque jour, mais qui ne l'a point été par ci-devant), et autant qu'aucune autre question de Mécanique, ou d'Optique ou d'Astronomie, ou autre matière qui ne soit point purement géométrique, ou arithmétique, ait jamais été démontrée. Mais d'exiger de moi des démonstrations géométriques en une matière qui dépend de la Physique, c'est vouloir que je fasse des choses impossibles. Et si on ne veut nommer démonstrations que les preuves des géomètres, il faut donc dire qu'Archimède n'a jamais rien démontré dans les Mécaniques, ni Vitellion en l'Optique, ni Ptolémée en l'Astronomie, etc., ce qui toutefois ne se dit pas. Car on se contente, en telles matières, que les auteurs, ayant présupposé certaines choses qui ne sont point manifestement contraires à l'expérience, aient au reste parlé conséquemment et sans faire de paralogismes, encore même que leurs suppositions ne soient pas exactement vraies. » Descartes, *Lettre au père Mersenne du 17 mai 1638*, dans *Œuvres*, Garnier, II, p. 62-63.